2021 한국물리학회 대경지부 학술논문발표

작용량 개념에 대한 예비물리교사들의 이해

임성민 (대구대학교 물리교육과)

연구의 배경

- 벡터와 뉴턴 운동법칙을 도입하지 않는 고전역학?
- 복소함수와 슈뢰딩거 방정식에서 출발하지 않는 양자역학?
- 텐서와 장방정식 없이 설명하는 일반상대론?
- 현대물리학부터 시작하여 고전물리학을 통합하는 접근?

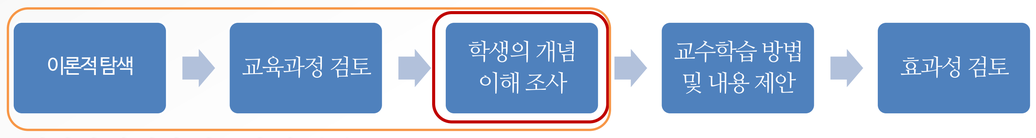
→ 작용량(action) 개념에 기반한 대안적 접근을 제기 *(E. F. Taylor 등, 하단 참고문헌)*

연구의 목적

대학 물리교육 수준에서 작용량 개념의 도입 가능성 탐색

→ 예비 물리교사들의 작용량 관련 개념에 대한 이해 조사

연구방법과 내용



일련의 탐색적 연구의 한 부분

연구 대상

국내 사범대학 물리교육과에 재학중인 학부 2학년부터 4학년까지 예비물리교사 37명

학년				관련 과목 이수(중복)			계
2	3	4	기타	역학	현대	양자	
13	12	9	3	34	20	10	37
35%	32%	24%	8%	92%	57%	28%	100%

이론 (1) 작용량

- 작용량(action): 입자의 운동을 설명하기 위해서 에너지 개념과 연관지어 도입된 추상적인 물리량
- 작용량 S는 어떤 사건 A에서 B까지 입자가 이동하는 동안의 그 입자의 라그랑지안(운동에너지와 퍼텐셜에너지의 차)을 시간에 따라 적분한 값으로 정의

$$S = \int_A^B (T - V)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (T - V)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

- 즉, 작용량은 사건 A에서 B까지 입자의 운동에너지와 퍼텔션 에너지 차의 평균 × 걸린 시간

이론 (2) 정상 작용 원리

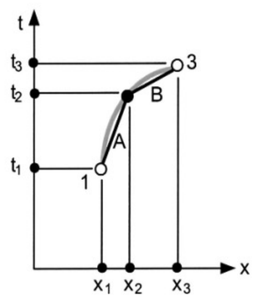
- 입자는 그 작용량이 인접 경로에 비해 극소가 되는 경로 ($\delta S = 0$) 즉, 정상 경로(stationary path)를 따라서 움직인다.

→ '최소 작용 원리(least action principle)' 또는 '정상 작용 원리(stationary action principle)'

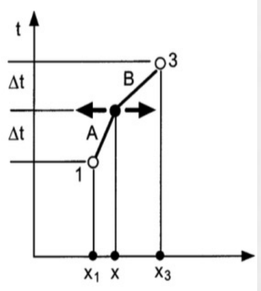
- 어떤 입자가 놓여있는 계의 퍼텐셜 에너지를 알고 있고, 처음 상태와 나중 상태를 측정할 수 있다면, 정상 작용 원리에 따라 입자의 운동 경로를 구할 수 있다.
- 정상작용원리로부터 라그랑주 방정식을 유도할 수 있고, 뉴턴 운동법칙과 동일한 결과를 준다.

(작용량 개념에 기초한 라그랑지 방정식 유도 예시)

$L(x,v) = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(x), \quad S = \int_{path} L(x,v)\,dt = \overline{L(x,v)}\,T$



사건1(x_1, t_1)에서 사건3(x_3, t_3)으로 가는 경로



시간 간격이 동일한 경로 A, B로 구분

$L_A = L\left(\frac{x_1+x}{2}, \frac{x-x_1}{\Delta t}\right) = L_A(x_A, v_A), \quad x_A = \frac{x_1+x}{2}, \quad v_A = \frac{x-x_1}{\Delta t}$

$L_B = L\left(\frac{x+x_3}{2}, \frac{x_3-x}{\Delta t}\right) = L_B(x_B, v_B) \quad x_B = \frac{x+x_3}{2}, \quad v_B = \frac{x_3-x}{\Delta t}$

$S_A \approx L_A \Delta t,\ S_B \approx L_B \Delta t$ 이므로 $S_{AB} = S_A + S_B \approx L_A \Delta t + L_B \Delta t$

정상 작용 원리 즉, $\delta S = 0$을 적용하여 풀면,

$$\frac{dS_{AB}}{dx} = 0 = \frac{\partial L_A}{\partial x_A}\frac{dx_A}{dx}\Delta t + \frac{\partial L_A}{\partial v_A}\frac{dv_A}{dx}\Delta t + \frac{\partial L_B}{\partial x_B}\frac{dx_B}{dx}\Delta t + \frac{\partial L_B}{\partial v_B}\frac{dv_B}{dx}\Delta t$$

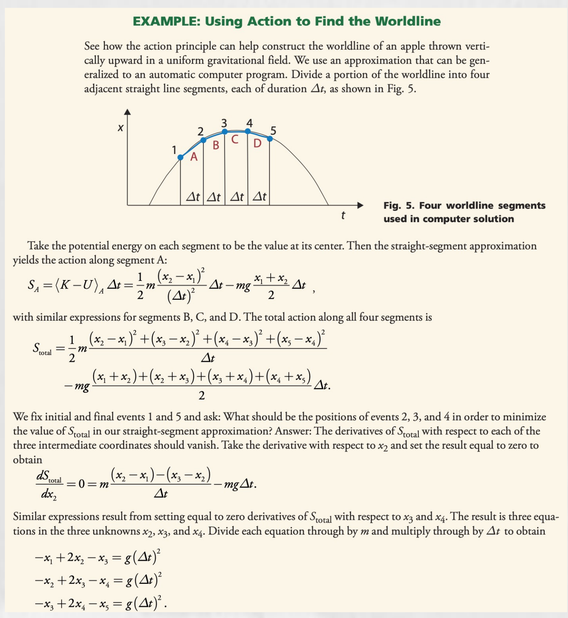
$\frac{dx_A}{dx} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dv_A}{dx} = +\frac{1}{\Delta t}, \quad \frac{dx_B}{dx} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dv_B}{dx} = -\frac{1}{\Delta t}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial L_A}{\partial x_A} + \frac{\partial L_B}{\partial x_B}\right) - \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial L_B}{\partial v_B} - \frac{\partial L_A}{\partial v_A}\right) = 0.$$

첫째 항은 $\partial L/\partial x$의 평균, 둘째 항은 $\Delta t \to 0$일 때 $d(\partial L/\partial v)/dt$

즉, $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right) = 0$

(작용량 개념에 기초한 물리 교수학습 접근 방법 예시)



EXAMPLE: Using Action to Find the Worldline

See how the action principle can help construct the worldline of an apple thrown vertically upward in a uniform gravitational field. We use an approximation that can be generalized to an automatic computer program. Divide a portion of the worldline into four adjacent straight line segments, each of duration Δt, as shown in Fig. 5.

Fig. 5. Four worldline segments used in computer solution

Take the potential energy on each segment to be the value at its center. Then the straight-segment approximation yields the action along segment A:

$$S_A = \langle K - U \rangle_A \Delta t = \frac{1}{2}m\frac{(x_2 - x_1)^2}{(\Delta t)^2}\Delta t - mg\frac{x_1 + x_2}{2}\Delta t\ ,$$

with similar expressions for segments B, C, and D. The total action along all four segments is

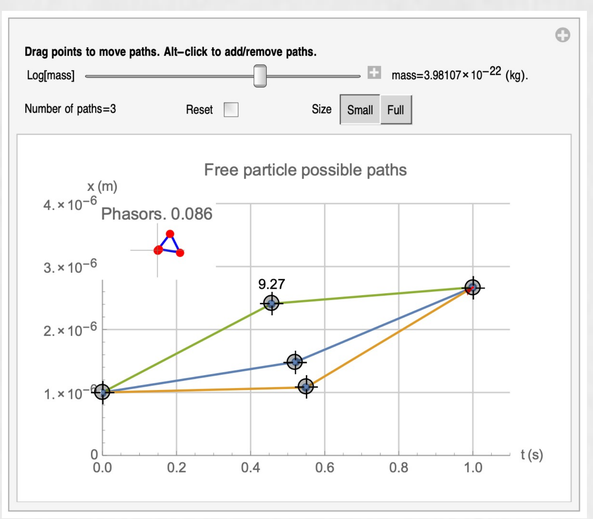
$$S_{\text{total}} = \frac{1}{2}m\frac{(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (x_4 - x_3)^2 + (x_5 - x_4)^2}{\Delta t} - mg\frac{(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_4) + (x_4 + x_5)}{2}\Delta t.$$

We fix initial and final events 1 and 5 and ask: What should be the positions of events 2, 3, and 4 in order to minimize the value of S_{total} in our straight-segment approximation? Answer: The derivatives of S_{total} with respect to each of the three intermediate coordinates should vanish. Take the derivative with respect to x_2 and set the result equal to zero to obtain

$$\frac{dS_{\text{total}}}{dx_2} = 0 = m\frac{(x_2 - x_1) - (x_3 - x_2)}{\Delta t} - mg\Delta t.$$

Similar expressions result from setting equal to zero derivatives of S_{total} with respect to x_3 and x_4. The result is three equations in the three unknowns x_2, x_3, and x_4. Divide each equation through by m and multiply through by Δt to obtain

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = g(\Delta t)^2$$
$$-x_2 + 2x_3 - x_4 = g(\Delta t)^2$$
$$-x_3 + 2x_4 - x_5 = g(\Delta t)^2.$$



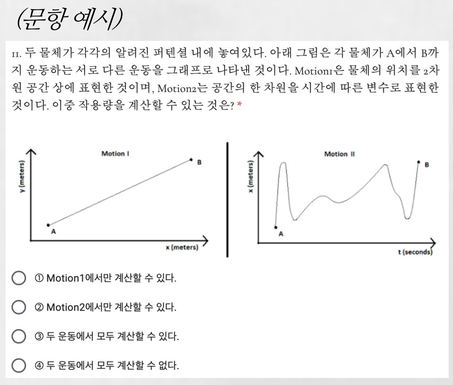
연구 도구

"작용량 개념 검사(action concept inventory)"

- 총 19개의 선택형 문항
- 9개의 하위 개념으로 구성: 경로, 정상 작용, 변분, 에너지 보존, 다중경로, 확률진폭, 중첩, 확률

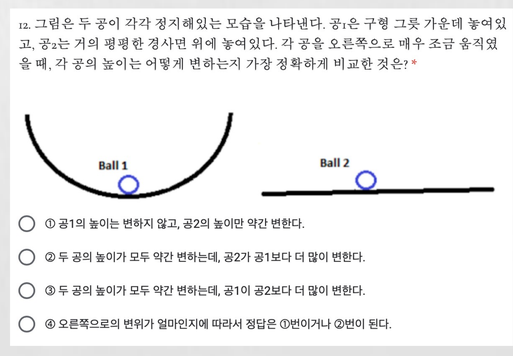
관련 개념	내용	문항번호
에너지 보존	(역학적) 에너지 총량은 보존된다.	1, 2
경로	시공간 좌표에서 발생한 사건을 잇는 곡선	10, 11
정상 작용	입자의 운동은 작용량이 인접한 경로에 비해 최소인 경로를 따른다.	7, 9, 16
정상 조건	경로의 인접 변화는 작용량의 인접 변화에 영향을 주지 않는다.	4, 6, 12, 13
퍼텐셜	퍼텐셜 곡선에서 기울기가 0인 지점에서 정지한 입자는 계속 정지한다.	3, 5
다중 경로	양자역학에서 두 상태를 전이하는 입자는 가능한 모든 경로를 취한다.	8, 19
복소진폭 (위상)	각 경로는 작용량에 의해 결정되는 복소진폭(위상)을 가진다.	15, 18
중첩	A에서 B까지 전이하는 동안의 총 진폭은 모든 경로의 진폭의 총합으로 결정된다.	14, 15, 17, 18
확률	전이 확률은 총 진폭의 제곱에 비례한다.	14, 17

(문항 예시)



11. 두 물체가 각각의 알려진 퍼텐셜 내에 놓여있다. 아래 그림은 각 물체가 A에서 B까지 운동하는 서로 다른 운동을 그래프로 나타낸 것이다. Motion1은 물체의 위치를 2차원 공간 상에 표현한 것이며, Motion2는 공간의 한 차원을 시간에 따른 변수로 표현한 것이다. 이 중 작용량을 계산할 수 있는 것은? *

① Motion1에서만 계산할 수 있다.
② Motion2에서만 계산할 수 있다.
③ 두 운동에서 모두 계산할 수 있다.
④ 두 운동에서 모두 계산할 수 없다.



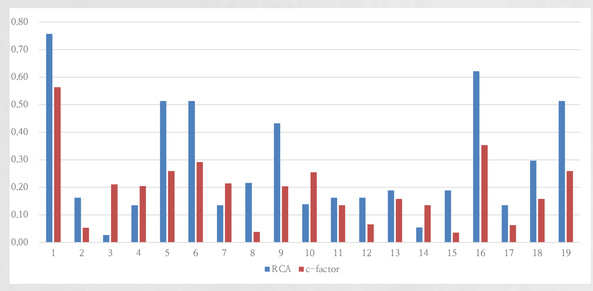
12. 그림은 두 공이 각각 정지해있는 모습을 나타낸다. 공1은 구형 그릇 가운데 놓여있고, 공2는 거의 평평한 경사면 위에 놓여있다. 각 공을 오른쪽으로 매우 조금 움직였을 때, 각 공의 높이는 어떻게 변하는지 가장 정확하게 비교한 것은? *

① 공1의 높이는 변하지 않고, 공2의 높이만 약간 변한다.
② 두 공의 높이가 모두 약간 변하는데, 공2가 공1보다 더 많이 변한다.
③ 두 공의 높이가 모두 약간 변하는데, 공1이 공2보다 더 많이 변한다.
④ 오른쪽으로의 변위가 얼마인지에 따라서 정답은 ①번이거나 ②번이 된다.

결과 및 고찰

관련 개념	문항	RCA	C-factor	Pattern	mean
에너지 보존	1	0.76	0.56	HH	0.46
	2	0.16	0.05	LL	
경로	10	0.14	0.25	LM	0.15
	11	0.16	0.14	LL	
정상 작용	7	0.14	0.21	LM	0.40
	9	0.43	0.20	MM	
	16	0.62	0.35	MM	
정상 조건	4	0.14	0.21	LM	0.25
	6	0.51	0.29	MM	
	12	0.16	0.07	LL	
	13	0.19	0.16	LL	
퍼텐셜	3	0.03	0.21	LM	0.27
	5	0.51	0.26	MM	
다중 경로	8	0.22	0.04	LL	0.37
	19	0.51	0.26	MM	
복소진폭 (위상)	15	0.19	0.04	LL	0.25
	18	0.30	0.16	LL	
중첩	14	0.05	0.14	LL	0.17
	15	0.19	0.04	LL	
	17	0.14	0.06	LL	
	18	0.30	0.16	LL	
확률	14	0.05	0.14	LL	0.10
	17	0.14	0.06	LL	
평균					0.28

RCA : 정답률
C-factor: 응답집중지수
Pattern : 정답률-응답집중도 분포
Ex)
HH: 정답에 집중된 경우. 쉬운 문항
LL : 정답률이 낮고 응답분포가 넓음. 어려운 문항
LM: 정답보다 특정 오답에 응답이 집중. 오개념
MM: 정답률이 높으나 특정 오답에 집중. 오개념



- 에너지 보존 개념 (46%)〉 정상 작용 원리 (40%)〉 다중 경로 (37%) 순으로 높은 정답률
- 확률 (10%) 〈 경로 (15%) 〈 중첩 (17%) 순으로 낮은 정답률
- 경로, 정상 작용, 정상 조건, 퍼텐셜, 다중 경로 등의 개념에서 특정 오개념 가능성
- 복소진폭, 중첩, 확률 등의 개념에서는 전체적인 개념 이해도가 낮음

결론 및 논의

- 작용량 개념 도입의 가능성 확인 : 정상 작용 원리, 다중 경로 원리 등에서 양호한 이해
- 작용량 개념 도입 시기에 대한 주의 : 양자역학을 배우지 않은 상태에서 확률 해석이 요구되는 개념 이해의 어려움
- 어려운 개념 vs 오개념 검토 필요 : 특정 오답 유형에 대한 보다 자세한 검토와 보강 연구 필요
- 학생의 개념 이해를 토대로 한 교수학습 방법 제안 등의 후속 연구 필요

"A Call to Action," Edwin F. Taylor. Guest Editorial, *American Journal of Physics*,Vol. 71, No. 5, 2003, 423-425.
"From conservation of energy to the principle of least action: A story line," Jozef Hanc and Edwin F. Taylor, *American Journal of Physics*, Vol. 72, No. 4, 2004, 514-521.
"Quantum physics explains Newton's laws of motion," Jon Ogborn and Edwin F. Taylor, *Physics Education*, Vol. 40, No. 1, 2005, 26-34.
"Action: Forcing Energy to Predict Motion," Dwight E. Neuenschwander, Edwin F. Taylor, and Slavomir Tuleja, *The Physics Teacher*, Vol. 44, 2006, 146-152.
"When action is not least," C. G. Gray and Edwin F. Taylor, *American Journal of Physics*, Vol. 75, No. 5, 2007, 434-458.

*Corresponding : ismphs@daegu.ac.kr